

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений



Каменский М.И.

подпись, расшифровка подписи

11.04.2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.14 Элементы теории фредгольмовых отображений

- 1. Код и наименование направления:** 02.04.01 математика и компьютерные науки.
- 2. Профиль подготовки:** математическое и компьютерное моделирование; математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении
- 3. Квалификация выпускника:** магистр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** кафедра функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Сапронова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, tsapr@mail.ru
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол № 0500–03 от 28.03.2024
- 8. Учебный год:** 2025–2026 **Семестр(ы):** третий

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели учебной дисциплины: изучение основ теории фредгольмовых отображений и фредгольмовых функционалов, заданных на банаховых пространствах.

Задачи учебной дисциплины: овладение навыками исследования функционалов, заданных на банаховых пространствах.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: дисциплина «Элементы теории фредгольмовых отображений» является основной дисциплиной блока Б1.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса «Элементы теории фредгольмовых отображений»:

- математический анализ (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные);
- функциональный анализ (метрические и линейные пространства, непрерывные отображения, норма, линейный ограниченный оператор, изоморфизм, вполне непрерывные операторы).

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код	Индикатор	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1	Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	Знать: основные методы формулирования и решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики
		ОПК-1.2	Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности	Уметь: использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности
		ОПК-1.3	Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	Владеть: навыками решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (в соответствии с учебным планом) — 3/108.

Форма промежуточной аттестации — зачет.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		сем. 3	сем. 4
Аудиторные занятия	20	20	

в том числе:	лекции	10	10	
	практические	10	10	
	лабораторные	0	0	
Самостоятельная работа		88	88	
в том числе: курсовая работа (проект)		0	0	
Форма промежуточной аттестации		Зачет 0	Зачет 0	
Итого:		108	108	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Вполне непрерывные операторы.	Относительно компактные множества в нормированных пространствах (определение). Относительно компактные множества в конечномерных пространствах. Относительно компактные множества в пространстве $C[a,b]$. Теорема Арцела (без доказательства). Линейные ограниченные операторы (определение и примеры). Норма оператора. Вполне непрерывные операторы (определение). Пример: оператор Фредгольма.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980
1.2	Линейный фредгольмов оператор и его индекс	Фактор–пространство линейного пространства (определение и пример). Топологический изоморфизм линейных пространств. Прямые суммы. Ядро, образ и коядро линейного оператора. Линейный фредгольмов оператор и его индекс (определение). Теорема об образе фредгольмова оператора (без доказательства). Основные свойства фредгольмовых операторов (без доказательства). Примеры линейных фредгольмовых операторов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980
1.3	Нелинейные фредгольмовы отображения	Производная Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах (определение и примеры). Теорема о производной композиции отображений (без доказательства). Нелинейные фредгольмовы отображения (определение). Индекс фредгольмова отображения (определение). Функционалы на банаховых пространствах. Определение градиента. Критические точки функционалов. Лемма о связи градиента с критическими точками. Определение фредгольмова функционала и его индекса.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980
2. Практические занятия			
2.1	Вполне непрерывные операторы.	Относительно компактные множества в нормированных пространствах (задачи). Относительно компактные множества в конечномерных пространствах. Относительно компактные множества в пространстве $C[a,b]$. Теорема Арцела (задачи). Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. Вполне непрерывные операторы (задачи).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980
2.2	Линейный фредголь-	Фактор–пространство линейного пространства (определение и пример). Топологический изоморфизм линейных пространств.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980

	мов оператор и его индекс	Прямые суммы. Ядро, образ и коядро линейного оператора. Линейный фредгольмов оператор и его индекс. Примеры линейных фредгольмовых операторов. Задачи.	hp?id=10980
2.3	Нелинейные фредгольмовы отображения	Производная Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах (задачи). Теорема о производной композиции отображений (задачи). Нелинейные фредгольмовы отображения (задачи). Индекс фредгольмова отображения (задачи). Функционалы на банаховых пространствах. Определение градиента. Критические точки функционалов. Лемма о связи градиента с критическими точками. Определение фредгольмова функционала и его индекса. Вычисление градиентов некоторых функционалов (4 примера). Вспомогательные задачи (3 задачи). Уравнение маятника. Доказательство фредгольмовости отображения $f(x) = \ddot{x} + \lambda \sin x$ (при соответствующем выборе пространств).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)					Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Контроль	
1	Вполне непрерывные операторы.	3	3	0	24	0	30
2	Линейный фредгольмов оператор и его индекс	2	2	0	24	0	28
3	Нелинейные фредгольмовы отображения	5	5	0	40	0	50
Итого:		10	10	0	88	0	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий и активную работу во время занятий, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 88 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по данной дисциплине предполагает выполнение следующих заданий:

- 1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1–3 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;
- 2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (3 семестр – зачет).

В ходе изучения курса предусмотрено проведение коллоквиума (в форме индивидуального собеседования) и контрольной работы.

Учебные пособия по данному курсу размещены на сайтах <https://vk.com/nelinan> и <https://vk.com/fredholm>. На сайте <https://vk.com/fredholm> преподаватель публикует вспомогательные материалы и указания по изучаемым в данный момент вопросам, презентации лекций, решения задач, программы коллоквиумов и т.д.

При изучении материала курса по учебнику (конспекту) нужно, прежде всего, уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное – это понять изложенное в учебнике (конспекте), а не “заучить”.

Изучать материал рекомендуется по темам. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п.; в точных формулировках, как правило, существенно каждое слово, поэтому важно понять их смысл и уметь изложить их своими словами.

Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, поняв идею доказательства; пытаться просто их “заучивать” не следует, никакой пользы это не принесет.

Особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач; теоретические знания надо научиться применять на практике. Для этого, изучив материал данной темы, надо разбираться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике или обсуждаются на занятиях. Разбирая и решая задачи, обращайтесь внимание на то, какие положения теории применяются.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – СПб.: Лань, 2009. – 272 с. (см. https://vk.com/nelinan, https://vk.com/fredholm?w=wall-161468263_5)</i>
2	<i>Звягин В.Г. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства. Учебное пособие / В.Г. Звягин [и др.] – ВГУ, 2007. – 81 с. (см. https://vk.com/fredholm?w=wall-199313526_8%2Fall)</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	<i>Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 572 с. (см. https://vk.com/fredholm?w=wall-161468263_5)</i>
4	<i>Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 392 с. (см. https://vk.com/nelinan)</i>
5	<i>Борисович Ю.Г. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович [и др.] – М.: Наука, 1995. – 416 с. (см. https://vk.com/nelinan)</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Ресурс
6	https://vk.com/fredholm – страница «В Контакте», посвященная данному курсу
7	https://lib.vsu.ru/ – электронный каталог ЗНБ ВГУ

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	<i>Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 392 с. (см. https://vk.com/nelinan)</i>
2	<i>Борисович Ю.Г. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович [и др.] – М.: Наука, 1995. – 416 с. (см. https://vk.com/nelinan)</i>

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ».

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows, Microsoft Office, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Explorer, ноутбук.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: учебная аудитория: специализированная мебель

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Вполне непрерывные операторы.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
2.	Линейный фредгольмов оператор и его индекс	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
3.	Нелинейные фредгольмовы отображения	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				Перечень вопросов к зачету

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: домашние задания, контрольная работа.

20.1.1 Перечень заданий для контрольной работы

БИЛЕТ 1

1. Функционал $V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + x^2 + 2x \right) dt$ задан на БП

$$E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}; \quad F = C[0,1], \quad H = L_2[0,1].$$

Найдите отображение $f(x) = \text{grad}V(x)$, производную Фреше отображения $f: E \rightarrow F$ и докажите, что функционал $V(x)$ является фредгольмовым индекса ноль.

2. Оператор A действует из БП $E = C^1[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = (t+1) \cdot x(t), \quad x \in E, \quad t \in [0,1];$$

$E = C^1[0,1]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$

функций, $\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)|$.

Докажите, опираясь непосредственно на теорему Арцела, что оператор A является вполне непрерывным.

БИЛЕТ 2

1. Функционал $V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \sin^2 x \right) dt$ задан на БП

$$E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}; \quad F = C[0,1], \quad H = L_2[0,1].$$

Найдите отображение $f(x) = \text{grad}V(x)$, производную Фреше отображения $f: E \rightarrow F$ и докажите, что функционал $V(x)$ является фредгольмовым индекса ноль.

2. Оператор A действует из БП $E = C^1[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = e^t \cdot x(t), \quad x \in E, \quad t \in [0,1];$$

$E = C^1[0,1]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$

функций, $\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)|$.

Докажите, опираясь непосредственно на теорему Арцела, что оператор A является вполне непрерывным.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

контрольная работа, собеседование по билетам.

20.2.1 Перечень вопросов к зачету

1. Относительно компактные множества в нормированных пространствах (определение).
2. Относительно компактные множества в конечномерных пространствах.

3. Относительно компактные множества в пространстве $C[a,b]$. Теорема Арцела (без доказательства).
4. Линейные ограниченные операторы (определение и примеры). Норма оператора.
5. Вполне непрерывные операторы (определение). Пример : оператор Фредгольма.
6. Фактор–пространство линейного пространства (определение и пример).
7. Топологический изоморфизм линейных пространств. Прямые суммы.
8. Ядро, образ и коядро линейного оператора.
9. Линейный фредгольмов оператор и его индекс (определение). Теорема об образе фредгольмова оператора (без доказательства).
10. Основные свойства фредгольмовых операторов (без доказательства).
11. Примеры линейных фредгольмовых операторов.
12. Производная Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах (определение и примеры). Теорема о производной композиции отображений (без доказательства).
13. Нелинейные фредгольмовы отображения (определение). Индекс фредгольмова отображения (определение).
14. Функционалы на банаховых пространствах. Определение градиента. Критические точки функционалов. Лемма о связи градиента с критическими точками.
15. Определение фредгольмова функционала и его индекса.
16. Вычисление градиентов некоторых функционалов (4 примера).
17. Вспомогательные задачи (3 задачи).
18. Уравнение маятника. Доказательство фредгольмовости отображения $f(x) = \ddot{x} + \lambda \sin x$ (при соответствующем выборе пространств).

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Задания закрытого типа

1. Оператор $A = \frac{d^2}{dt^2}$ действует из пространства $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ в пространство $F = C[0,1]$, $Ax = \ddot{x}$.

Размерность ядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : а) 0

Решение. Пусть $x \in \text{Ker } A$. Тогда $Ax = \ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = at + b$. В силу условия $x(0) = x(1) = 0$ получаем, что $x(t) \equiv 0$. Следовательно, $\text{Ker } A = \{\theta\}$.

2. Оператор $A = \frac{d^2}{dt^2}$ действует из пространства $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ в пространство $F = C[0,1]$, $Ax = \ddot{x}$.

Размерность коядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : а) 0

Решение. Рассмотрим произвольный $y \in F$. Элемент $x \in E$, заданный выражением

$$x(t) = \int_0^t \left(\int_0^s y(u) du \right) ds - t \int_0^1 \left(\int_0^s y(u) du \right) ds, \quad \text{для которого выполняется условие}$$

$x(0) = x(1) = 0$, является решением уравнения $Ax = \ddot{x} = y$, то есть является прообразом элемента y . Итак, $\text{Im } A = F$. Следовательно, коядро оператора A нульмерно.

3. Оператор $B = \frac{d^2}{dt^2}$ действует из пространства $E = C^2[0,1]$ в пространство

$F = C[0,1]$, $Bx = \ddot{x}$. Размерность ядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : в) 2

Решение. Пусть $x \in \text{Ker } B$. Тогда $Bx = \ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}^1$.

Следовательно, $\text{Ker } B$ двумерно.

4. Оператор $B = \frac{d^2}{dt^2}$ действует из пространства $E = C^2[0,1]$ в пространство

$F = C[0,1]$, $Bx = \ddot{x}$. Размерность коядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : а) 0

Решение. Рассмотрим произвольный $y \in F$. Элемент $x \in C^2[0,1]$, заданный выражением

$$x(t) = \int_0^t \left(\int_0^s y(u) du \right) ds, \quad \text{является решением уравнения } Bx = \ddot{x} = y, \text{ то есть является}$$

прообразом элемента y . Итак, $\text{Im } B = F$. Следовательно, коядро оператора B нульмерно.

5. Отображение $f(x) = \dot{x}$ действует из пространства $E = C^1[0,1]$ в пространство $F = C[0,1]$. Производная Фреше этого отображения равна: а) нулевому оператору,

б) единичному оператору, в) оператору дифференцирования $B = \frac{d}{dt}$.

Ответ : в) оператору дифференцирования $B = \frac{d}{dt}$.

Решение. $f(x+h) - f(x) = \dot{x} + \dot{h} - \dot{x} = \frac{d}{dt}h = Bh$.

6. Верно ли, что любой линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ является фредгольмовым ?

Ответ: верно.

Решение. Очевидно, что $\dim \text{Ker } A \leq n$ и $\dim \text{Coker } A \leq m$.

Задания открытого типа

7. Найдите фредгольмов индекс оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ответ: 0

Решение. Матрица невырождена, так как ее определитель отличен от нуля. Следовательно, оператор является изоморфизмом, то есть его фредгольмов индекс равен нулю.

8. Найдите фредгольмов индекс оператора $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$Ax = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ответ: 0

Решение. Матрица оператора имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Она невырождена, так как ее определитель отличен от нуля.

Следовательно, оператор является изоморфизмом, то есть его фредгольмов индекс равен нулю.

9. Оператор $A = \frac{d^2}{dt^2}$ действует из пространства $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ в пространство $F = C[0,1]$. Найдите фредгольмов индекс этого оператора.

Ответ : 0

Решение. $\text{Ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A = 0$ (см. задания 1 и 2).

10. Оператор $B = \frac{d^2}{dt^2}$ действует из пространства $E = C^2[0,1]$ в пространство

$F = C[0,1]$. Найдите фредгольмов индекс этого оператора.

Ответ : 2

Решение. $\text{Ind } B = \dim \text{Ker } B - \dim \text{Coker } B = 2$ (см. задания 3 и 4).

11. Оператор $B = \frac{d}{dt}$ действует из пространства $E = C^1[0,1]$ в пространство

$F = C[0,1]$, $Bx = \dot{x}$. Найдите размерность ядра этого оператора равна.

Ответ : 1.

Решение. Пусть $x \in \text{Ker } B$. Тогда $Bx = \dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = a$, $a \in \mathbb{R}^1$.

Следовательно, $\text{Ker } B$ одномерно.

12. Оператор $B = \frac{d}{dt}$ действует из пространства $E = C^1[0,1]$ в пространство

$F = C[0,1]$, $Bx = \dot{x}$. Найдите фредгольмов индекс этого оператора.

Ответ : 1.

Решение. $\text{Ker } B$ одномерно (см. задание 11). $\text{Im } B = F$, то есть коядро оператора B нульмерно. Следовательно, $\text{Ind } B = \dim \text{Ker } B - \dim \text{Coker } B = 1$.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:**1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):**

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).